応用力学研究所研究集会報告 No.17ME-S2
「非線形波動および非線形力学系の現象と数理」（研究代表者　梶原健司）

Reports of RIAM Symposium No.17ME-S2
Phenomena and Mathematical Theory of Nonlinear Waves and Nonlinear Dynamical Systems
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - 12, 2005

Article No. 40

アファイン球面の超離散化（へ向けて）

松浦 望（MATSUURA Nozomu）

（Received March 4, 2006）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
May, 2006

アファイン球面の超離散化（に向けて）

福岡大学理学部　松浦 望* (Matsuura Nozomu)

概 要

昨年, 廣田と高橋 [4] によって超離散ツィツェイカ方程式が提出された. ツィツェイカ方程式はアファイン球面を記述する方程式である. また, 差分ツィツェイカ方程式が差分アファイン球面を記述することも知られている. そこで, 超離散ツィツェイカ方程式の幾何的な対応物がどんなものであるかを知りたい (というのが最終目標だが, まだ到底その段階には至っていない).

このノートの内容はつぎのとおりである. 第 1 節と第 2 節でアファイン球面および差分アファイン球面について簡単にまとめたのち, 第 3 節でそれらの例を与える. 以上は概ねボベンコとシーフの論文 [2] の要約である. 第 4 節でアファイン球面の超離散化へ向けて, 簡単な実験をして終わりたい.

1　アファイン球面

不定値なアファイン計量 h をもつアファイン球面 $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{A}^3$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$ を考える. このとき座標系 (u,v) が漸近座標系にとれて $h = 2\omega\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ と書ける. ガウスの公式は

$$\begin{aligned} {\partial_u}^2 f &= \frac{\partial_u \omega}{\omega}\partial_u f + \frac{a}{\omega}\partial_v f, && (1)\\ \partial_u\partial_v f &= \omega f, && (2)\\ {\partial_v}^2 f &= \frac{b}{\omega}\partial_u f + \frac{\partial_v \omega}{\omega}\partial_v f && (3) \end{aligned}$$

であり, 可積分条件 (ガウスとコダッチの方程式) は

$$\partial_u\partial_v \log\omega - \omega + \frac{ab}{\omega^2} = 0, \tag{4}$$

$$\partial_v a = 0, \tag{5}$$

$$\partial_u b = 0 \tag{6}$$

である. 逆に連立方程式 (4)–(6) の解に対して, 等積アファイン変換の差を除き, アファイン球面がただひとつ定まる. 以上のことの詳細および証明は, 適当な書籍 (たとえば [1, pp. 48, 65, 105] など) を参考のこと. このノートでは連立方程式 (4)–(6) を**ツィツェイカ方程式**と呼ぶ. ツィツェイカ方程式 (4)–(6) は変換

$$a \mapsto \lambda a, \quad b \mapsto \lambda^{-1} b, \quad \lambda \in \mathbb{R}^\times$$

により変わらないから, これによりアファイン球面の 1 径数族 $\{f^\lambda\}$ を得る. 径数 λ を**スペクトル径数**という. 以下, 各 f^λ のことを, それに付随したツィツェイカ方程式の解 ω, a, b を込めて (f,ω,a,b,λ) と書く.

定理 1.1 (ベックルント変換 [2, p. 121]) アファイン球面 (f,ω,a,b,λ) に対して

$$\widehat{f} \;=\; f + \frac{2\mu}{\lambda-\mu}\frac{\partial_v \log\psi}{\omega}\partial_u f - \frac{2\lambda}{\lambda-\mu}\frac{\partial_u\log\psi}{\omega}\partial_v f \tag{7}$$

*nozomu at fukuoka-u.ac.jp

とおく．ただし函数と径数の組 (ψ,μ) は (f,ω,a,b,μ) に関するガウスの公式 (1)–(3) のスカラー解, すなわち

$$\begin{aligned}{\partial_u}^2\psi &= \frac{\partial_u\omega}{\omega}\partial_u\psi+\frac{\mu a}{\omega}\partial_v\psi,\\ \partial_u\partial_v\psi &= \omega\psi,\\ {\partial_v}^2\psi &= \frac{\mu^{-1}b}{\omega}\partial_u\psi+\frac{\partial_v\omega}{\omega}\partial_v\psi\end{aligned}$$

をみたすものとする．このとき $\left(\widehat{f},\widehat{\omega},a,b,\lambda\right)$ もアファイン球面となる．ただし

$$\widehat{\omega} = \omega-2\partial_u\partial_v\log\psi$$

である．

証明は, 組 $\left(\widehat{f},\widehat{\omega},a,b,\lambda\right)$ がガウスの公式 (1)–(3) をみたすことを, 直截に計算で確かめればよい．

2 差分アファイン球面

この節では, 差分アファイン球面の定義, 差分アファイン球面に対するガウスの公式, およびベックルント変換について述べる．

定義 2.1 正数 ε,δ を任意に固定する．写像 $f\colon \varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}\to\mathbb{A}^3$, $(u,v)\mapsto f_v^u$ が**差分アファイン球面**であるとは, 次のふたつが成り立つことをいう．

- 各 $(u,v)\in\varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}$ に対して 5 点 f_v^u, $f_v^{u+\varepsilon}$, $f_v^{u-\varepsilon}$, $f_{v+\delta}^u$, $f_{v-\delta}^u$ は同一平面上にある．
- 各 $(u,v)\in\varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}$ に対してベクトル $f_{v+\delta}^{u+\varepsilon}+f_v^u$ とベクトル $f_v^{u+\varepsilon}+f_{v+\delta}^u$ は平行である．

はじめの条件は漸近座標系を採ったこと (1), (3) の差分化, あとの条件は漸近座標系に関して調和 (2) であることの差分化, と理解できる．差分アファイン球面の例は第 3 節を見よ．

定理 2.2 ([2, p. 119]) 差分アファイン球面 $f\colon \varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}\to\mathbb{A}^3$ に対して, 函数 $\omega,a,b\colon \varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ が存在して, つぎの偏差分方程式系をみたす．

$$\Delta_{+u}\Delta_{-u}f_v^u = \left(\frac{\Delta_{-u}\omega_v^u}{\omega_v^u}-\frac{\delta}{2}\omega_v^{u-\varepsilon}\right)\Delta_{+u}f_v^u+\frac{a_v^u}{\omega_v^u}\Delta_{+v}f_v^u, \tag{8}$$

$$\Delta_{+u}\Delta_{+v}f_v^u = \frac{\omega_v^u}{2}\left(f_v^{u+\varepsilon}+f_{v+\delta}^u\right), \tag{9}$$

$$\Delta_{+v}\Delta_{-v}f_v^u = \frac{b_v^u}{\omega_v^u}\Delta_{+u}f_v^u+\left(\frac{\Delta_{-v}\omega_v^u}{\omega_v^u}-\frac{\varepsilon}{2}\omega_{v-\delta}^u\right)\Delta_{+v}f_v^u, \tag{10}$$

および

$$\frac{\omega_v^u\Delta_{-u}\Delta_{-v}\omega_v^u-\Delta_{-u}\omega_v^u\Delta_{-v}\omega_v^u}{\omega_{v-\delta}^u\omega_v^{u-\varepsilon}}-\frac{\omega_v^u+\omega_{v-\delta}^{u-\varepsilon}}{2}-\frac{\varepsilon\delta}{4}\omega_v^u\omega_{v-\delta}^{u-\varepsilon}+\frac{2+\varepsilon\delta\omega_{v-\delta}^{u-\varepsilon}}{2+\varepsilon\delta\omega_v^u}\frac{a_v^ub_v^u}{\omega_{v-\delta}^u\omega_v^{u-\varepsilon}}=0, \tag{11}$$

$$a_v^u\left(2+\varepsilon\delta\omega_{v-\delta}^{u-\varepsilon}\right)-a_{v-\delta}^u\left(2+\varepsilon\delta\omega_v^u\right)=0, \tag{12}$$

$$b_v^u\left(2+\varepsilon\delta\omega_{v-\delta}^{u-\varepsilon}\right)-b_v^{u-\varepsilon}\left(2+\varepsilon\delta\omega_v^u\right)=0. \tag{13}$$

ただし記号 Δ_{+u} は u に関する前進差分をあらわし, Δ_{-u} は u に関する後進差分をあらわすものとする．記号 $\Delta_{\pm v}$ についても同様である．たとえば

$$\Delta_{+u}f_v^u=\frac{f_v^{u+\varepsilon}-f_v^u}{\varepsilon},\quad \Delta_{-v}f_v^u=\frac{f_v^u-f_{v-\delta}^u}{\delta}$$

など. 証明は両立条件を計算するだけ (詳しい計算は文献 [3, pp. 3-50–3-52] にある) なので略す. このノートでは連立方程式 (11)–(13) を**差分ツィツェイカ方程式**と呼ぶ.

注意 2.3 新たな函数 $\tau\colon \varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を

$$\frac{2a_v^u}{2+\varepsilon\delta\omega_v^u}=\frac{\left(\tau_v^u\right)^2}{\tau_v^{u-\varepsilon}\tau_v^{u+\varepsilon}},\quad \frac{2b_v^u}{2+\varepsilon\delta\omega_v^u}=\frac{\left(\tau_v^u\right)^2}{\tau_{v-\delta}^{u}\tau_{v+\delta}^{u}},\quad \frac{2+\varepsilon\delta\omega_v^u}{2}=\frac{\tau_v^{u+\varepsilon}\tau_{v+\delta}^{u}}{\tau_v^u\tau_{v+\delta}^{u+\varepsilon}}$$

によって定義しよう. このとき式 (12), (13) は自明であって, 式 (11) は

$$\frac{1}{\varepsilon^3\delta^3}\det\begin{pmatrix}\tau_v^u & \tau_v^{u+\varepsilon} & \tau_v^{u+2\varepsilon}\\ \tau_{v+\delta}^u & \tau_{v+\delta}^{u+\varepsilon} & \tau_{v+\delta}^{u+2\varepsilon}\\ \tau_{v+2\delta}^u & \tau_{v+2\delta}^{u+\varepsilon} & \tau_{v+2\delta}^{u+2\varepsilon}\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\left(\tau_{v+\delta}^{u+\varepsilon}\right)^3=0$$

と書ける.

つぎに差分アファイン球面に対するベックルント変換を考える. 差分ツィツェイカ方程式 (11)–(13) は変換

$$\left(a_v^u, b_v^u\right)\mapsto\left(\lambda a_v^u,\, \lambda^{-1}b_v^u\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}^\times$$

によって変わらないから, 差分アファイン球面は 1 径数族 $\left\{f_{u,v}^\lambda\right\}$ を持つ. 以下, 各 $f_{u,v}^\lambda$ のことを, それに付随した差分ツィツェイカ方程式の解 ω_v^u, a_v^u, b_v^u を込めて $(f_v^u, \omega_v^u, a_v^u, b_v^u, \lambda)$ と書く.

定理 2.4 (ベックルント変換 [2, p. 126]) 差分アファイン球面 $(f_v^u, \omega_v^u, a_v^u, b_v^u, \lambda)$ に対して

$$\widehat{f}_v^u \;=\; \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}f_v^u+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{2+\varepsilon\delta\omega_v^u}{\omega_v^u}\frac{\Delta_{+v}\psi_v^u}{\psi_v^u}\Delta_{+u}f_v^u-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{2+\varepsilon\delta\omega_v^u}{\omega_v^u}\frac{\Delta_{+u}\psi_v^u}{\psi_v^u}\Delta_{+v}f_v^u \tag{14}$$

とおく. ただし函数と径数の組 (ψ_v^u, μ) は, 差分アファイン球面 $(f_v^u, \omega_v^u, a_v^u, b_v^u, \mu)$ に関するガウスの公式 (8)–(10) のスカラー解, すなわち

$$\begin{aligned}\Delta_{+u}\Delta_{-u}\psi_v^u &= \left(\frac{\Delta_{-u}\omega_v^u}{\omega_v^u}-\frac{\delta}{2}\omega_v^{u-\varepsilon}\right)\Delta_{+u}\psi_v^u+\frac{\mu a_v^u}{\omega_v^u}\Delta_{+v}\psi_v^u,\\ \Delta_{+u}\Delta_{+v}\psi_v^u &= \frac{\omega_v^u}{2}\left(\psi_v^{u+\varepsilon}+\psi_{v+\delta}^u\right),\\ \Delta_{+v}\Delta_{-v}\psi_v^u &= \frac{\mu^{-1}b_v^u}{\omega_v^u}\Delta_{+u}\psi_v^u+\left(\frac{\Delta_{-v}\omega_v^u}{\omega_v^u}-\frac{\varepsilon}{2}\omega_{v-\delta}^u\right)\Delta_{+v}\psi_v^u\end{aligned}$$

をみたすものとする. このとき $\left(\widehat{f}_v^u,\, \widehat{\omega}_v^u,\, \widehat{a}_v^u,\, \widehat{b}_v^u,\, \lambda\right)$ も差分アファイン球面である. ただし

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_v^u &= \frac{\psi_v^{u+\varepsilon}\psi_{v+\delta}^u}{\psi_v^u\psi_{v+\delta}^{u+\varepsilon}}\omega_v^u-\frac{2}{\varepsilon\delta}\frac{\psi_v^u\psi_{v+\delta}^{u+\varepsilon}-\psi_v^{u+\varepsilon}\psi_{v+\delta}^u}{\psi_v^u\psi_{v+\delta}^{u+\varepsilon}},\\ \widehat{a}_v^u &= \frac{\psi_v^{u+\varepsilon}\psi_{v+\delta}^u}{\psi_v^u\psi_{v+\delta}^{u+\varepsilon}}\frac{\left(\psi_v^u\right)^2}{\psi_v^{u-\varepsilon}\psi_v^{u+\varepsilon}}a_v^u,\\ \widehat{b}_v^u &= \frac{\psi_v^{u+\varepsilon}\psi_{v+\delta}^u}{\psi_v^u\psi_{v+\delta}^{u+\varepsilon}}\frac{\left(\psi_v^u\right)^2}{\psi_{v-\delta}^u\psi_{v+\delta}^u}b_v^u\end{aligned}$$

とする.

証明は, 組 $\left(\widehat{f}_v^u,\, \widehat{\omega}_v^u,\, \widehat{a}_v^u,\, \widehat{b}_v^u,\, \lambda\right)$ がふたたびガウスの公式 (8)–(10) をみたすことを, 直截に計算で示せばよい. 略す.

3　例

差分アファイン球面の例は, 後出の式 (21) や式 (31) で与えられる．この節ではこれら 2 式の導出方法を論文 [2, pp. 132–134] にしたがって述べる．

例 3.1 グラフ $\left(x^2+y^2\right)z=1$ はもっとも簡単なアファイン球面の例である．図 1 を参照．このグラフは

$$f=\begin{pmatrix}\exp\left(-r\left(u+v\right)\right)\cos\left(\sqrt{3}r\left(u-v\right)\right)\\ \exp\left(-r\left(u+v\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}r\left(u-v\right)\right)\\ \exp\left(2r\left(u+v\right)\right)\end{pmatrix} \tag{15}$$

と漸近座標系 (u,v) で径数表示できる．ただし $r\in\mathbb{R}^{\times}$ は任意の定数[†]とする．ガウスの公式は

$$\partial_u{}^2 f=2r\partial_v f,\quad \partial_u\partial_v f=4r^2 f,\quad \partial_v{}^2 f=2r\partial_u f$$

となり, 対応するツィツェイカ方程式の解は, 定数函数

$$\omega=4r^2,\quad a=b=2r$$

である．さて, このグラフの差分化 $f\colon\varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}\to\mathbb{A}^3$ を考えよう．そのため, 対応する差分ツィツェイカ方程式の解 $\omega,a,b\colon\varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ をそれぞれ定数函数とする．このとき定理 2.2 より写像 f と定数 ω,a,b は

$$\Delta_{+u}\Delta_{-u}f_v^u = -\frac{\delta\omega}{2}\Delta_{+u}f_v^u+\frac{a}{\omega}\Delta_{+v}f_v^u, \tag{16}$$

$$\Delta_{+u}\Delta_{+v}f_v^u = \frac{\omega}{2}\left(f_v^{u+\varepsilon}+f_{v+\delta}^u\right), \tag{17}$$

$$\Delta_{+v}\Delta_{-v}f_v^u = \frac{b}{\omega}\Delta_{+u}f_v^u-\frac{\varepsilon\omega}{2}\Delta_{+v}f_v^u \tag{18}$$

および

$$\varepsilon\delta\omega^4+4\omega^3-4ab=0$$

をみたす．ガウスの公式 (16)–(18) のスカラー解 $\phi\colon\varepsilon\mathbb{Z}\times\delta\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ が, 正の定数 $s,t\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ を用いて

$$\phi_v^u=s^{2u}t^{2v}$$

で与えられたとする．これとは独立なスカラー解をあとふたつ構成したい．ガウスの公式 (16)–(18) より, 定数 s,t は

$$\begin{aligned} as^{2\varepsilon}\left(s^{2\varepsilon}+1\right) &= \frac{2+\varepsilon\delta\omega}{\varepsilon^3}\left(s^{2\varepsilon}-1\right)^3-\frac{\delta^2\omega^2}{2\varepsilon}s^{2\varepsilon}\left(s^{2\varepsilon}-1\right),\\ \frac{\omega}{2}\left(s^{2\varepsilon}+t^{2\delta}\right) &= \frac{s^{2\varepsilon}t^{2\delta}-s^{2\varepsilon}-t^{2\delta}+1}{\varepsilon\delta},\\ bt^{2\delta}\left(t^{2\delta}+1\right) &= \frac{2+\varepsilon\delta\omega}{\delta^3}\left(t^{2\delta}-1\right)^3-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2\delta}t^{2\delta}\left(t^{2\delta}-1\right)\end{aligned} \tag{19}$$

をみたす．したがって定数 ω,a,b は, 定数 ε,δ,s,t によって

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\left(s^{2\varepsilon}t^{2\delta}-s^{2\varepsilon}-t^{2\delta}+1\right)}{\varepsilon\delta\left(s^{2\varepsilon}+t^{2\delta}\right)},\\ a &= \frac{2t^{2\delta}\left(s^{2\varepsilon}+1\right)\left(s^{2\varepsilon}-1\right)^3}{\varepsilon^3 s^{2\varepsilon}\left(s^{2\varepsilon}+t^{2\delta}\right)^2},\\ b &= \frac{2s^{2\varepsilon}\left(t^{2\delta}+1\right)\left(t^{2\delta}-1\right)^3}{\delta^3 t^{2\delta}\left(s^{2\varepsilon}+t^{2\delta}\right)^2}\end{aligned}$$

[†] この r は意味のないパラメータ (座標変換で $r=1/2$ とできる) だが, 差分版 (21) との比較のため書いておく．

と表示できる．以下では議論を簡単にして

$$s = t, \quad \delta = \varepsilon$$

とする．いま $c := s^{2\varepsilon} = t^{2\delta}$ とおけば

$$\omega = \frac{(c-1)^2}{\varepsilon^2 c}, \quad a = b = \frac{(c+1)(c-1)^3}{2\varepsilon^3 c^2} \tag{20}$$

となる．一方, 式 (19) より, 定数 c は x についての 3 次方程式

$$ax(x+1) \ = \ \frac{2+\varepsilon\delta\omega}{\varepsilon^3}(x-1)^3 - \frac{\delta^2\omega^2}{2\varepsilon}x(x-1)$$

の実数解である．ここに式 (20) を代入して整理すれば

$$(x-c)\left(c\left(c^2+1\right)x^2 - 2c(c+1)x + c^2+1\right) = 0$$

を得る．この根は

$$c, \quad c^{-1/2}\exp\left(\sqrt{-1}\theta\right), \quad c^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{-1}\theta\right)$$

である．ただし $0 < \theta < \pi/2$ は

$$\cos\theta = \frac{(c+1)\sqrt{c}}{c^2+1}, \quad \sin\theta = \frac{|c-1|\sqrt{c^2+c+1}}{c^2+1}$$

によって決まる定数とする．したがって特に

$$\begin{aligned}
\Re\left(\left(c^{-1/2}\exp\left(\sqrt{-1}\theta\right)\right)^{u/\varepsilon}\left(c^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{-1}\theta\right)\right)^{v/\varepsilon}\right) &= s^{-(u+v)}\cos\left(\frac{u-v}{\varepsilon}\theta\right), \\
\Im\left(\left(c^{-1/2}\exp\left(\sqrt{-1}\theta\right)\right)^{u/\varepsilon}\left(c^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{-1}\theta\right)\right)^{v/\varepsilon}\right) &= s^{-(u+v)}\sin\left(\frac{u-v}{\varepsilon}\theta\right)
\end{aligned}$$

はガウスの公式 (16)–(18) のスカラー解となる．以上をまとめれば, 任意の正定数 $s \neq 1$ に対して

$$f_v^u := \begin{pmatrix} s^{-(u+v)}\cos\left(\dfrac{u-v}{\varepsilon}\arccos\dfrac{\left(s^{2\varepsilon}+1\right)s^{\varepsilon}}{s^{4\varepsilon}+1}\right) \\ s^{-(u+v)}\sin\left(\dfrac{u-v}{\varepsilon}\arccos\dfrac{\left(s^{2\varepsilon}+1\right)s^{\varepsilon}}{s^{4\varepsilon}+1}\right) \\ s^{2(u+v)} \end{pmatrix} \tag{21}$$

は差分アファイン球面 $f\colon (\varepsilon\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{A}^3$ を与えるのが分かる．ガウスの公式は

$$\Delta_{+u}\Delta_{-u}f_v^u = -\frac{\varepsilon\omega}{2}\Delta_{+u}f_v^u + \frac{a}{\omega}\Delta_{+v}f_v^u, \tag{22}$$

$$\Delta_{+u}\Delta_{+v}f_v^u = \frac{\omega}{2}\left(f_v^{u+\varepsilon} + f_{v+\varepsilon}^u\right), \tag{23}$$

$$\Delta_{+v}\Delta_{-v}f_v^u = \frac{a}{\omega}\Delta_{+u}f_v^u - \frac{\varepsilon\omega}{2}\Delta_{+v}f_v^u \tag{24}$$

となる．ただし

$$\omega = \left(\frac{s^{\varepsilon}-s^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2, \quad a = \frac{s^{\varepsilon}+s^{-\varepsilon}}{2}\left(\frac{s^{\varepsilon}-s^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^3$$

である．図 2 および図 3 を参照．

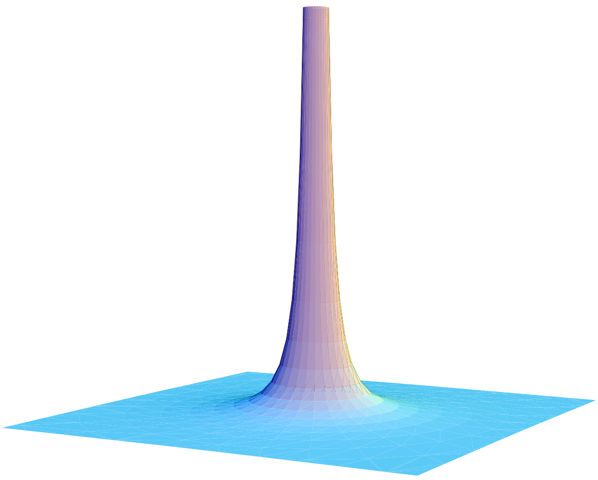

図 1: グラフ $\left(x^2+y^2\right)z=1$.

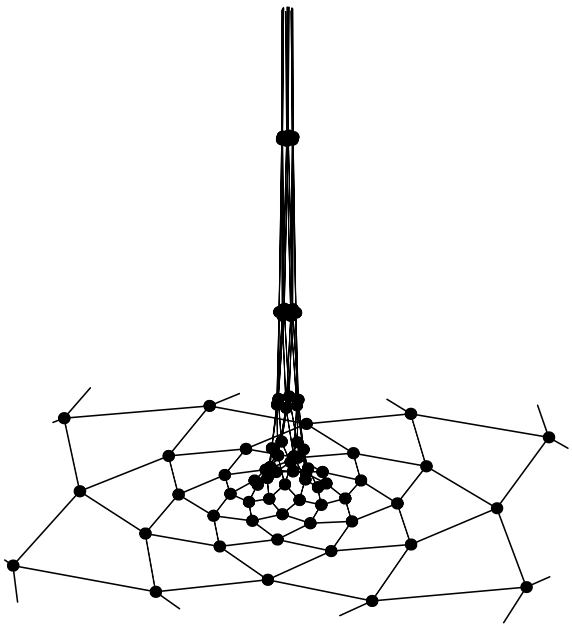

図 2: $s=\dfrac{\sqrt{7}+1-\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2\sqrt{3}}$.

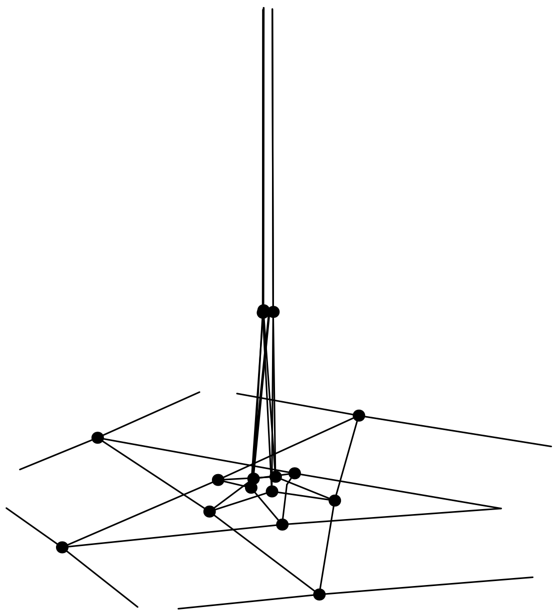

図 3: $s=\dfrac{1+\sqrt{4-\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-1+2\sqrt{4-\sqrt{5}}}}{\sqrt{5}-1}$.

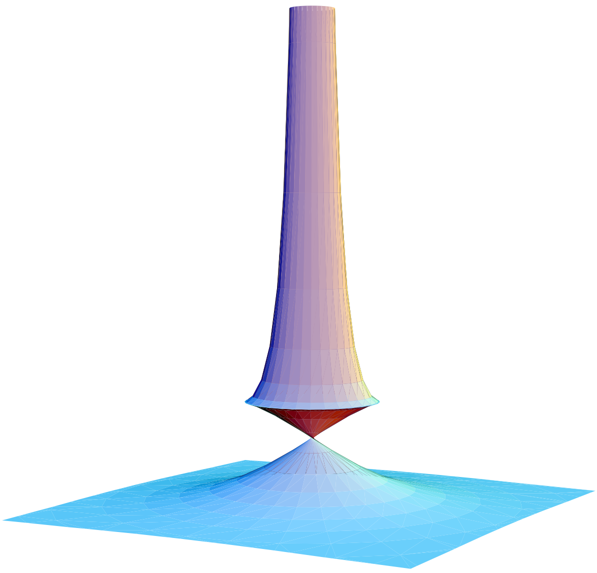

図 4: 式 (25) の $\widehat{f}$.

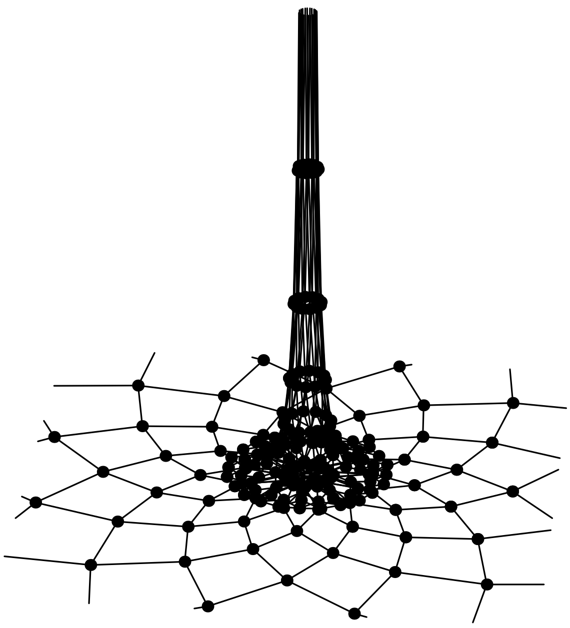

図 5: $s = 3^{1/4}$.

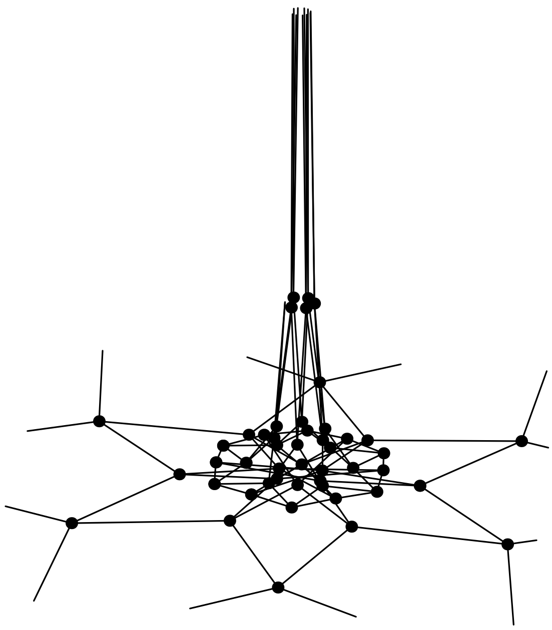

図 6: $s = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

例 3.2 ベックルント変換を利用して, より複雑の例を構成しよう. 式 (15) において $r=1/2$ とすれば

$$f=\begin{pmatrix}\exp\left(-\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\sqrt{3}\frac{u-v}{2}\right)\\ \exp\left(-\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\sqrt{3}\frac{u-v}{2}\right)\\ \exp(u+v)\end{pmatrix}$$

であって, ガウスの公式は

$$\partial_u{}^2 f=\partial_v f,\quad \partial_u\partial_v f=f,\quad \partial_v{}^2 f=\partial_u f$$

となる. ここでスペクトル径数を複素数まで許せば, 函数

$$\psi=\cosh\left(\sqrt{3}\frac{u+v}{2}\right)\exp\left(\sqrt{-1}\frac{u-v}{2}\right)$$

は, スペクトル径数を $\sqrt{-1}$ とするスカラー解である. すなわち ψ は

$$\partial_u{}^2\psi=\sqrt{-1}\partial_v\psi,\quad \partial_u\partial_v\psi=\psi,\quad \partial_v{}^2\psi=-\sqrt{-1}\partial_u\psi$$

をみたす. この ψ を用いて f にベックルント変換 (7) を施し, 最後にその実部をとろう:

$$\begin{aligned}\widehat{f}\;&:=\;\Re\left(f+\frac{2\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\frac{\partial_v\psi}{\psi}\partial_u f-\frac{2}{1-\sqrt{-1}}\frac{\partial_u\psi}{\psi}\partial_v f\right)\\ &=\;\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\tanh\left(\sqrt{3}\,\frac{u+v}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\tanh\left(\sqrt{3}\,\frac{u+v}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2}\right)\\ \left(2-\sqrt{3}\tanh\left(\sqrt{3}\,\frac{u+v}{2}\right)\right)\exp(u+v)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{25}$$

ガウスの公式は

$$\partial_u{}^2\widehat{f}\;=\;\frac{\partial_u\widehat{\omega}}{\widehat{\omega}}\partial_u\widehat{f}+\frac{1}{\widehat{\omega}}\partial_v\widehat{f},\quad \partial_u\partial_v\widehat{f}\;=\;\widehat{\omega}\widehat{f},\quad \partial_v{}^2\widehat{f}\;=\;\frac{1}{\widehat{\omega}}\partial_u\widehat{f}+\frac{\partial_v\widehat{\omega}}{\widehat{\omega}}\partial_v\widehat{f}$$

であって, 対応するツィツェイカ方程式の解は

$$\widehat{\omega}\;=\;\frac{3}{2}\tanh^2\left(\sqrt{3}\,\frac{u+v}{2}\right)-\frac{1}{2},\quad a=b=1$$

である. 図 4 を参照. つぎに $\widehat{f}$ を差分化しよう. 道具はベックルント変換 (14) である. ガウスの公式 (22)–(24) の, スペクトル径数を $\sqrt{-1}$ とするスカラー解 $\psi\colon(\varepsilon\mathbb{Z})^2\to\mathbb{C}$ を考える. すなわち函数 ψ が

$$\Delta_{+u}\Delta_{-u}\psi_v^u\;=\;-\frac{\varepsilon\omega}{2}\Delta_{+u}\psi_v^u+\sqrt{-1}\frac{a}{\omega}\Delta_{+v}\psi_v^u,\tag{26}$$

$$\Delta_{+u}\Delta_{+v}\psi_v^u\;=\;\frac{\omega}{2}\left(\psi_v^{u+\varepsilon}+\psi_{v+\varepsilon}^u\right),\tag{27}$$

$$\Delta_{+v}\Delta_{-v}\psi_v^u\;=\;-\sqrt{-1}\frac{a}{\omega}\Delta_{+u}\psi_v^u-\frac{\varepsilon\omega}{2}\Delta_{+v}\psi_v^u\tag{28}$$

をみたすとする. ここで定数 ω, a は正定数 $s\neq 1$ を用いて式 (20) のように書けていた (ただし $c=s^{2\varepsilon}$ である). ガウスの公式 (26)–(28) の解が, 定数 $p,q\in\mathbb{C}$ を用いて

$$\psi_v^u=p^{2u}q^{2v}$$

で与えられたとすれば, 定数 p, q は

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}ap^{2\varepsilon}\left(p^{2\varepsilon}+1\right) &= \frac{2+\varepsilon^2\omega}{\varepsilon^3}\left(p^{2\varepsilon}-1\right)^3-\frac{\varepsilon\omega^2}{2}p^{2\varepsilon}\left(p^{2\varepsilon}-1\right), && (29)\\ \frac{\omega}{2}\left(p^{2\varepsilon}+q^{2\varepsilon}\right) &= \frac{p^{2\varepsilon}q^{2\varepsilon}-p^{2\varepsilon}-q^{2\varepsilon}+1}{\varepsilon^2}, && (30)\\ -\sqrt{-1}aq^{2\varepsilon}\left(q^{2\varepsilon}+1\right) &= \frac{2+\varepsilon^2\omega}{\varepsilon^3}\left(q^{2\varepsilon}-1\right)^3-\frac{\varepsilon\omega^2}{2}q^{2\varepsilon}\left(q^{2\varepsilon}-1\right) \end{aligned}$$

をみたす. 式 (30) より q は p と ω から決まる. 式 (29) より定数 $p^{2\varepsilon}$ は x についての 3 次方程式

$$\sqrt{-1}ax\left(x+1\right) = \frac{2+\varepsilon^2\omega}{\varepsilon^3}\left(x-1\right)^3-\frac{\varepsilon\omega^2}{2}x\left(x-1\right)$$

の解である. これを因数分解して

$$\begin{aligned} &\left(\left(c-\sqrt{-1}\right)x+\sqrt{-1}\left(c+\sqrt{-1}\right)\right)\\ &\quad\left(2c\left(c+\sqrt{-1}\right)x^2-\left(1+\sqrt{-1}\right)\left(c^2+1\right)\left(c+1\right)x+2\sqrt{-1}c\left(c-\sqrt{-1}\right)\right)=0 \end{aligned}$$

を得る. この根は

$$\frac{1-\sqrt{-1}c}{c-\sqrt{-1}},\quad \exp\left(\kappa+\sqrt{-1}\sigma\right),\quad \exp\left(-\kappa+\sqrt{-1}\sigma\right)$$

である. ただし κ, σ は

$$\exp\kappa = \frac{\left(c+1\right)\sqrt{c^2+1}+\left(c-1\right)\sqrt{c^2+4c+1}}{2\sqrt{2}c},$$

$$\exp\left(\sqrt{-1}\sigma\right) = \frac{c+1+\sqrt{-1}\left(c-1\right)}{\sqrt{2\left(c^2+1\right)}}$$

によって決まる定数とする. 定数 κ は

$$\cosh\kappa = \frac{\left(c+1\right)\sqrt{c^2+1}}{2\sqrt{2}c}$$

をみたしていることに注意. したがって特に

$$\psi_v^u := \cosh\left(\kappa\,\frac{u+v}{\varepsilon}\right)\exp\left(\sqrt{-1}\,\frac{u-v}{\varepsilon}\sigma\right)$$

もまたガウスの公式 (26)–(28) の解となるのが分かる. この ψ_v^u を用いて式 (21) の f_v^u にベックルント変換 (14) を施し, 最後にその実部をとろう:

$$\widehat{f}_v^u := \Re\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}f_v^u+\frac{\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\frac{2+\varepsilon\delta\omega}{\omega}\frac{\Delta_{+v}\psi_v^u}{\psi_v^u}\Delta_{+u}f_v^u-\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\frac{2+\varepsilon\delta\omega}{\omega}\frac{\Delta_{+u}\psi_v^u}{\psi_v^u}\Delta_{+v}f_v^u\right).$$

以上をまとめれば, 任意の正定数 $s\neq 1$ に対して

$$\widehat{f}_v^u = \begin{pmatrix} \left(-1+\dfrac{\sqrt{2}s^{2\varepsilon}}{\sqrt{s^{4\varepsilon}+1}}\dfrac{\cosh\left(\kappa\left(u+v+\varepsilon\right)/\varepsilon\right)}{\cosh\left(\kappa\left(u+v\right)/\varepsilon\right)}\right)\dfrac{s^{-(u+v)}}{s^{2\varepsilon}-1}\cos\left(\dfrac{u-v}{\varepsilon}\arccos\dfrac{s^{2\varepsilon}+1}{\sqrt{2\left(s^{4\varepsilon}+1\right)}}\right)\\ \left(-1+\dfrac{\sqrt{2}s^{2\varepsilon}}{\sqrt{s^{4\varepsilon}+1}}\dfrac{\cosh\left(\kappa\left(u+v+\varepsilon\right)/\varepsilon\right)}{\cosh\left(\kappa\left(u+v\right)/\varepsilon\right)}\right)\dfrac{s^{-(u+v)}}{s^{2\varepsilon}-1}\sin\left(\dfrac{u-v}{\varepsilon}\arccos\dfrac{s^{2\varepsilon}+1}{\sqrt{2\left(s^{4\varepsilon}+1\right)}}\right)\\ \left(s^{4\varepsilon}+s^{2\varepsilon}-\sqrt{2\left(s^{4\varepsilon}+1\right)}\dfrac{\cosh\left(\kappa\left(u+v+\varepsilon\right)/\varepsilon\right)}{\cosh\left(\kappa\left(u+v\right)/\varepsilon\right)}\right)\dfrac{s^{2(u+v)}}{s^{2\varepsilon}-1} \end{pmatrix} \tag{31}$$

は差分アファイン球面 $\widehat{f}\colon\ (\varepsilon\mathbb{Z})^2\to\mathbb{A}^3$ を与えるのが分かる. ただし定数 κ は

$$\cosh\kappa = \frac{\left(s^{2\varepsilon}+1\right)\sqrt{s^{4\varepsilon}+1}}{2\sqrt{2}s^{2\varepsilon}}$$

で定める (このような κ は 2 つあるがどちらを採ってもよい). 図 5 および図 6 を参照. 対応する差分ツィツェイカ方程式 (11)–(13) の解は

$$\widehat{\omega}_v^u = -\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{s^{2\varepsilon} + s^{-2\varepsilon}}{\varepsilon^2} \frac{\cosh^2\left(\kappa\left(u+v+\varepsilon\right)/\varepsilon\right)}{\cosh\left(\kappa\left(u+v\right)/\varepsilon\right)\cosh\left(\kappa\left(u+v+2\right)/\varepsilon\right)},$$
$$\widehat{a}_v^u = \widehat{b}_v^u = \frac{s^{\varepsilon} + s^{-\varepsilon}}{2}\left(\frac{s^{\varepsilon} - s^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^3 \frac{\cosh\left(\kappa\left(u+v\right)/\varepsilon\right)\cosh\left(\kappa\left(u+v+\varepsilon\right)/\varepsilon\right)}{\cosh\left(\kappa\left(u+v-\varepsilon\right)/\varepsilon\right)\cosh\left(\kappa\left(u+v+2\varepsilon\right)/\varepsilon\right)}$$

である.

4 超離散化 (?)

差分アファイン球面の超離散化を考えたい. が, 一般に ‘超離散アファイン球面’ をどう定義すべきか分からないので, この節では, 前節で与えたもっとも簡単の差分アファイン球面 (21) のみを対象に, 通常の超離散化の手続きを真似してみよう. 整数 m, n を

$$m = \frac{u+v}{\varepsilon}, \quad n = \frac{u-v}{\varepsilon}$$

とおき, 式 (21) の f_v^u をふたたび f_n^m と書けば

$$f_n^m = \sqrt{c^{2m} + c^{-m}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{c^{3m}+1}} \cos\left(n \arccos \dfrac{(c+1)\sqrt{c}}{c^2+1}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{c^{3m}+1}} \sin\left(n \arccos \dfrac{(c+1)\sqrt{c}}{c^2+1}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{c^{-3m}+1}} \end{pmatrix}$$

である. ただし $c \neq 1$ は任意の正定数. ここで定数 c を

$$c = \exp \frac{C}{\varepsilon}$$

と置きかえて, はじめに f_n^m の ‘大きさ’ を ε 乗してから, つぎに f_n^m の各成分ごとに極限 $\varepsilon \to +0$ をとる:

$$F_n^m := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(e^{2Cm/\varepsilon} + e^{-Cm/\varepsilon}\right)^{\varepsilon/2} \begin{pmatrix} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(e^{3Cm/\varepsilon}+1\right)^{-1/2} \cos \dfrac{n\pi}{2} \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(e^{3Cm/\varepsilon}+1\right)^{-1/2} \sin \dfrac{n\pi}{2} \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(e^{-3Cm/\varepsilon}+1\right)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

この F_n^m を f_n^m の超離散化と思うことにする. もうすこし具体的に書けば, たとえば定数 C が正のときは

$$F_n^m = \begin{cases} e^{Cm} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & m > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(n\pi/2) \\ \sin(n\pi/2) \\ 1 \end{pmatrix}, & m = 0, \\ e^{-Cm/2} \begin{pmatrix} \cos(n\pi/2) \\ \sin(n\pi/2) \\ 0 \end{pmatrix}, & m < 0 \end{cases}$$

となる. 次頁の図を参照.

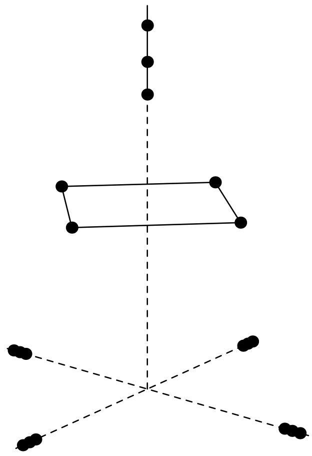

図 7: $C = 1/10$.

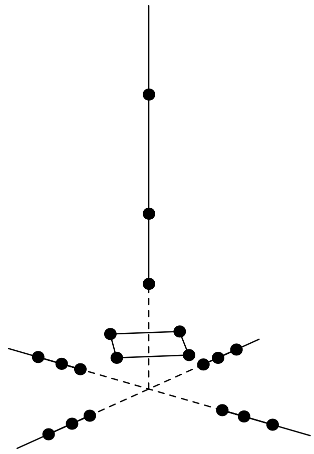

図 8: $C = 1/2$.

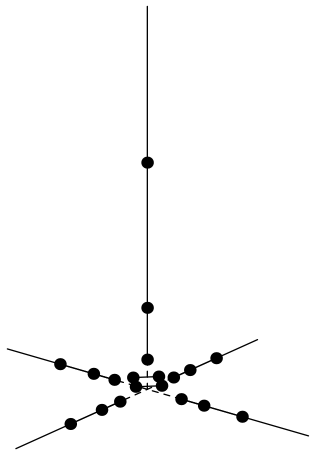

図 9: $C = 1$.

これらは各 C に対して F_n^m を描いたものである. 図 1 から図 3 までにみた曲面の特徴をいちおう捉えているように見える.

5 まとめ

ツィツェイカ方程式の自明解が記述する曲面 $\left(x^2 + y^2\right) z = 1$ を例にとり, その差分化 f_v^u, および超離散化 F_n^m について述べた. しかし, 第 4 節の方法 (すなわち差分アファイン球面の座標成分ごとに超離散極限をとること) によって超離散ツィツェイカ方程式 [4] との対応を知るのは難しく, また, 得られた '超離散アファイン球面' の幾何的な意味もはっきりしない. 改善が必要である. 当面の課題をいまいちど書けば

- 超離散アファイン球面を定義し,
- 超離散ツィツェイカ方程式との対応を明らかに

することである.

参考文献

[1] 野水克己・佐々木武, アファイン微分幾何学, 裳華房, 1994.

[2] A. Bobenko and W. Schief, *Discrete indefinite affine spheres*, Discrete integrable geometry and physics, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. vol. 16, Oxford Univ. Press, New York, 1999, pp. 113–138.

[3] 井ノ口順一・小林真平・松浦望, 曲面の微分幾何学とソリトン方程式—可積分幾何入門—, 立教 SFR 講究録 No. 8, 2005.

[4] R. Hirota and D. Takahashi, *Ultradiscretization of the Tzitzéica equation*, Glasgow Math. J. 47A (2005), pp. 77–85.

[5] 中田庸一, 超離散負定曲率曲面の構成, 修士論文 (東京大学), 平成 16 年度.