空間離散曲線の等周等距離変形と離散 K 曲面

松浦 望（福岡大学理学部）

2013 年 11 月 2 日

概要

空間曲線が時間とともに変形していくとき, その曲率も変化していくが, 特定のルールにしたがう変形に対しては曲率の時間変化がソリトン方程式で記述されることが知られている. 本稿では差分幾何の観点から, そのような変形の離散化について述べる. とくに, 捩率が一定な空間離散曲線に対して, その捩率を保存するような離散的変形を離散可積分系理論の立場から定式化することが目標である.

1 はじめに

空間曲線の変形理論においては, 可積分条件として, 例えばラム [15] や橋本 [6] を始めとする多くの研究者によって提示されたように, modified KdV (mKdV) 方程式や非線形シュレディンガー (NLS) 方程式, およびそれらの階層が自然に現れることが知られている. その後, 差分幾何（離散微分幾何あるいは離散可積分幾何とも呼ばれる）の研究の流れを受けて, 離散化された曲線の連続変形が多く考察されてきた. 例えば平面離散曲線の連続変形は [4] [10] [11], 空間離散曲線の連続変形は [4] [8] [17] などが挙げられ, そこでは半離散 mKdV 方程式や半離散 NLS 方程式によって記述されるような, 離散曲線の連続変形が定式化されている. つぎに離散曲線の離散的な変形に目を向けよう. 平面離散曲線については離散 mKdV 方程式で記述される変形 [16] [12] が知られている. ところが, 空間離散曲線については離散可積分系理論の視点にたった研究がほとんどなく, ひとつには [5] で離散サイン・ゴルドン方程式による変形が, またもうひとつには [9][18] で離散 NLS 方程式による変形がそれぞれわずかに議論されている程度である.

本稿の目的は, 定捩率な空間曲線の空間上の mKdV 流 [15] の離散的類似を提示することである. すなわち, 捩率が一定の空間離散曲線に対して, その捩率と弧長をともに保存するような離散的変形を, 離散 mKdV 方程式をもちいて記述することが目標である. 以下に述べる内容は井ノ口順一, 梶原健司, 太田泰広の各氏との共同研究 [13] に基づく.

2 空間離散曲線

本節では空間離散曲線とそのフルネ枠を導入し, 空間離散曲線に対するフルネ・セレの公式を述べる.

定義 2.1 写像 $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ について, もしどの連続する 3 点 γ_{n+1}, γ_n, γ_{n-1} も共線でないならば, これを空間離散曲線という. 空間離散曲線 γ に対して

$$\epsilon_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|$$

とおき, 函数 ϵ を弧長函数あるいは単に弧長と呼ぶ. また

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\epsilon_n}, \quad N_n = B_n \times T_n, \quad B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}$$

によって定まる写像 T, N, B をそれぞれ接ベクトル, 主法線ベクトル, および陪法線ベクトルと呼ぶ. さらに, 写像 $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{SO}(3)$, $n \mapsto \Phi_n = [T_n, N_n, B_n]$ を空間離散曲線 γ のフルネ枠と呼ぶ.

フルネ枠 Φ は差分方程式

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n R_1(-\nu_{n+1}) R_3(\kappa_{n+1}) \tag{1}$$

をみたす．これは空間離散曲線に対するフルネ・セレの公式である．ただし R_1, R_3 は回転行列

$$R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり, $\kappa\colon \mathbb{Z} \to (0, \pi)$ と $\nu\colon \mathbb{Z} \to [-\pi, \pi)$ はつぎの式で定義される角度である．

$$\langle T_n, T_{n-1} \rangle = \cos\kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos\nu_n, \quad \langle B_n, N_{n-1} \rangle = \sin\nu_n.$$

函数 κ がだいたい曲率のような役割を果たし, 函数 ν がだいたい捩率のような役割を果たすが, その詳細には立ち入らない．以後, 定捩率の空間離散曲線を考えるため, 捩率については正確に次の定義を与える．

定義 2.2 函数 $\lambda_n = (1/\epsilon_n)\sin\nu_{n+1}$ を空間離散曲線の捩率と呼ぶ．

また, 後の記号の便利のために

$$a_n = \left(1 + \tan^2\frac{\nu_{n+1}}{2}\right)\epsilon_n$$

とおく．

3 空間離散曲線の等周等距離変形

本節では, 定捩率 λ の空間離散曲線 γ に対して, その離散的変形を議論する．以後, 3 点 γ_{n+1}, γ_n, γ_{n-1} を通る平面を点 γ_n における接触平面と呼ぶ．新しい空間離散曲線 $\overline{\gamma}$ を次の要領で作る．

1. γ の任意の 1 点（例えば γ_0）をその点における接触平面上の勝手な位置 $\overline{\gamma}_0$ に移動し, 移動した距離を δ とする．ただし δ は $0 < \delta < 1/\lambda$ をみたすものとする．
2. 各点 γ_n の接触平面上に, 点 γ_n を中心として半径 δ の円周 C_n を描く．
3. 各点 γ_n を次の 3 条件をみたす位置 $\overline{\gamma}_n$ に動かす．
   (a) 円周 C_n 上にある．これを等距離条件という．
   (b) 弧長を保つ．これを等周条件という．
   (c) 接触平面の下半平面（すなわち T に関して N と反対側）にある．

この手順によって, 初期値 $\overline{\gamma}_0$ を決めれば新しい空間離散曲線 $\overline{\gamma}$ がただひとつ定まる．条件 3a, 3b に鑑みて, この変形を等周等距離変形と呼ぼう．ところが残念なことに, 等周等距離変形 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ は一般には捩率を保存しない．したがって, 捩率を保存するためには初期値 $\overline{\gamma}_0$ の位置をさらに制限する必要がある．われわれの目標はラム [15] の定理の離散化をすること, すなわち, 離散 mKdV 方程式によって統制されるような捩率保存の等周等距離変形を定式化することである．捩率を保存するための条件について, 次の命題を得る．

命題 3.1 定数 b, w_0 を任意に固定する．定捩率 λ の空間離散曲線 γ に対して, 新しい空間離散曲線 $\overline{\gamma}$ を

$$\overline{\gamma}_n = \gamma_n + \delta(\cos w_n T_n + \sin w_n N_n), \quad \delta = \frac{b}{1 + (b\lambda/2)^2}$$

によって定める．ただし数列 w_n は差分方程式

$$w_{n+1} = -\kappa_{n+1} + 2\arctan\frac{b + a_n}{b - a_n}\tan\frac{w_n}{2} \tag{2}$$

で定める．このとき, 次のことが成りたつ．

1. この離散時間発展 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ は等周等距離変形である．とくに $\overline{\gamma}$ は $\left|\overline{\gamma}_{n+1} - \overline{\gamma}_n\right| = |\gamma_{n+1} - \gamma_n| = \epsilon_n$ をみたし，さらに $|\overline{\gamma}_n - \gamma_n|$ は n に依らない定数である．
2. この離散時間発展 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ が捩率を保つための必要十分条件は，函数 $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1})$ がすべての n について定符号であることである．このとき，もし $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}) > 0$ ならば，空間離散曲線 $\overline{\gamma}$ のフルネ枠 $\overline{\Phi} = \left[\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\right]$ は
$$\overline{\Phi}_n = \Phi_n R_3\left(w_n\right) R_1\left(\mu\right) R_3\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1}\right), \quad \mu = -2 \arctan \frac{b\lambda}{2}$$
をみたす．また，もし $\sin(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}) < 0$ ならば，フルネ枠 $\overline{\Phi}$ は
$$\overline{\Phi}_n = \Phi_n R_3\left(w_n\right) R_1\left(\mu\right) R_3\left(-w_{n+1} - \kappa_{n+1}\right), \quad \mu = 2 \arctan \frac{2}{b\lambda}$$
をみたす．

証明　すべて直接の計算で分かる．まず，弧長が保存されることを示す．そのために $\overline{\gamma}$ の差分を計算すると
$$\overline{\gamma}_{n+1} - \overline{\gamma}_n = \frac{\epsilon_n}{1 + \left(b\lambda/2\right)^2} \Phi_n \begin{bmatrix} \cos 2U_n + \left(b\lambda/2\right)^2 \cos 2V_n \\ \sin 2U_n - \left(b\lambda/2\right)^2 \sin 2V_n \\ -b\lambda \sin\left(U_n + V_n\right) \end{bmatrix}$$
である．ただし
$$U_n = \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} + w_n}{2}, \quad V_n = \frac{w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_n}{2}$$
とおき，式 (2) からしたがう関係式 $a_n \sin U_n = b \sin V_n$ を用いた．ゆえに $\left|\overline{\gamma}_{n+1} - \overline{\gamma}_n\right| = \epsilon_n$ であり，弧長が保存される．したがって特に $\overline{\gamma}$ の接ベクトル $\overline{T}$ は
$$\overline{T}_n = \frac{\overline{\gamma}_{n+1} - \overline{\gamma}_n}{\epsilon_n} = \frac{1}{1 + \left(b\lambda/2\right)^2} \Phi_n \begin{bmatrix} \cos 2U_n + \left(b\lambda/2\right)^2 \cos 2V_n \\ \sin 2U_n - \left(b\lambda/2\right)^2 \sin 2V_n \\ -b\lambda \sin\left(U_n + V_n\right) \end{bmatrix} \tag{3}$$
である．つぎに捩率が保存されるための条件を求める．そのために空間離散曲線 $\overline{\gamma}$ の捩率を計算する．陪法線ベクトル $\overline{B}_n$ と主法線ベクトル $\overline{N}_n$ を求めるために，まず $\overline{T}_{n-1} \times \overline{T}_n$ を計算すると
$$\overline{T}_{n-1} \times \overline{T}_n = \frac{\sin\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}\right)}{1 + \left(b\lambda/2\right)^2} \Phi_n \begin{bmatrix} -b\lambda \sin w_n \\ b\lambda \cos w_n \\ 1 - \left(b\lambda/2\right)^2 \end{bmatrix}$$
となる．ゆえに
$$\overline{B}_n = \frac{\overline{T}_{n-1} \times \overline{T}_n}{\left|\overline{T}_{n-1} \times \overline{T}_n\right|} = \frac{\operatorname{sgn}\left(\sin\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}\right)\right)}{1 + \left(b\lambda/2\right)^2} \Phi_n \begin{bmatrix} -b\lambda \sin w_n \\ b\lambda \cos w_n \\ 1 - \left(b\lambda/2\right)^2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$
$$\overline{N}_n = \overline{B}_n \times \overline{T}_n = \frac{\operatorname{sgn}\left(\sin\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}\right)\right)}{1 + \left(b\lambda/2\right)^2} \Phi_n \begin{bmatrix} -\sin 2U_n - \left(b\lambda/2\right)^2 \sin 2V_n \\ \cos 2U_n - \left(b\lambda/2\right)^2 \cos 2V_n \\ -b\lambda \cos\left(U_n + V_n\right) \end{bmatrix}, \tag{5}$$
$$\overline{B}_{n+1} = \frac{\operatorname{sgn}\left(\sin\left(w_{n+2} + \kappa_{n+2} - w_n\right)\right)}{\left(1 + \left(b\lambda/2\right)^2\right)\left(1 + \left(a_n\lambda/2\right)^2\right)} \Phi_n \begin{bmatrix} -b\lambda\left(1 + \left(a_n\lambda/2\right)^2\right) \sin\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1}\right) \\ \lambda\left(\left(1 - \left(b\lambda/2\right)^2\right) a_n + b\left(1 - \left(a_n\lambda/2\right)^2\right) \cos\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1}\right)\right) \\ \left(1 - \left(b\lambda/2\right)^2\right)\left(1 - \left(a_n\lambda/2\right)^2\right) - a_n b\lambda^2 \cos\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1}\right) \end{bmatrix}$$
である．したがって，もし $\operatorname{sgn}\left(\sin\left(w_{n+2} + \kappa_{n+2} - w_n\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(w_{n+1} + \kappa_{n+1} - w_{n-1}\right)\right)$ ならば
$$\langle \overline{B}_{n+1}, \overline{B}_n \rangle = \frac{1 - \left(a_n\lambda/2\right)^2}{1 + \left(a_n\lambda/2\right)^2} = \frac{1 - \tan^2\left(\nu_{n+1}/2\right)}{1 + \tan^2\left(\nu_{n+1}/2\right)} = \cos \nu_{n+1},$$
$$\langle \overline{B}_{n+1}, \overline{N}_n \rangle = \frac{a_n\lambda}{1 + \left(a_n\lambda/2\right)^2} = \frac{2 \tan\left(\nu_{n+1}/2\right)}{1 + \tan^2\left(\nu_{n+1}/2\right)} = \sin \nu_{n+1}$$

であるから振率が保たれる．逆も正しい．すなわち $\sin\left(w_{n+1}+\kappa_{n+1}-w_{n-1}\right)$ が定符号であることは振率保存のための必要十分条件となっている．最後にフルネ枠の時間発展を書こう．つまり

$$\overline{\Phi}_n=\Phi_n M_n$$

を満たす行列 M_n を求めればよいが, すでに計算したとおり, 行列 M_n の各列は (3), (5), (4) の右辺に示した列ベクトルで与えられる．すなわち, もし $\sin\left(w_{n+1}+\kappa_{n+1}-w_{n-1}\right)>0$ ならば

$$\begin{aligned}M_n&=\frac{1}{1+(b\lambda/2)^2}\begin{bmatrix}\cos 2U_n+(b\lambda/2)^2\cos 2V_n & -\sin 2U_n-(b\lambda/2)^2\sin 2V_n & -b\lambda\sin w_n\\ \sin 2U_n-(b\lambda/2)^2\sin 2V_n & \cos 2U_n-(b\lambda/2)^2\cos 2V_n & b\lambda\cos w_n\\ -b\lambda\sin(U_n+V_n) & -b\lambda\cos(U_n+V_n) & 1-(b\lambda/2)^2\end{bmatrix}\\ &=R_3\left(w_n\right)R_1\left(\mu\right)R_3\left(w_{n+1}+\kappa_{n+1}\right),\quad \mu=-2\arctan\frac{b\lambda}{2}\end{aligned}$$

であり, もし $\sin(w_{n+1}+\kappa_{n+1}-w_{n-1})<0$ ならば

$$\begin{aligned}M_n&=\frac{1}{1+(b\lambda/2)^2}\begin{bmatrix}\cos 2U_n+(b\lambda/2)^2\cos 2V_n & \sin 2U_n+(b\lambda/2)^2\sin 2V_n & b\lambda\sin w_n\\ \sin 2U_n-(b\lambda/2)^2\sin 2V_n & -\cos 2U_n+(b\lambda/2)^2\cos 2V_n & -b\lambda\cos w_n\\ -b\lambda\sin(U_n+V_n) & b\lambda\cos(U_n+V_n) & -1+(b\lambda/2)^2\end{bmatrix}\\ &=R_3\left(w_n\right)R_1\left(\mu\right)R_3\left(-w_{n+1}-\kappa_{n+1}\right),\quad \mu=2\arctan\frac{2}{b\lambda}\end{aligned}$$

である． □

この命題で述べた手順を繰り返すと, 定振率 λ の空間離散曲線の列 $\gamma^0=\gamma$, $\gamma^1=\overline{\gamma}$, $\gamma^2=\overline{\gamma^1},\ldots,\gamma^m=\overline{\gamma^{m-1}},\ldots$ ができる．この時間発展によって, 初期曲線 γ^0 に付随する諸量 ϵ_n, ν_n, a_n はすべて保存されること, すなわちこれらの函数が時間発展の変数 m に依らないことに注意すると, つぎの定理を得る．

定理 3.2 (定振率な空間離散曲線の空間上の離散 mKdV 流と離散サイン・ゴルドン流) 定振率 λ の空間離散曲線 γ^0 に対して, 空間離散曲線の列 $\gamma^1,\gamma^2,\ldots$ を

$$\gamma_n^{m+1}=\gamma_n^m+\delta_m\left(\cos w_n^m T_n^m+\sin w_n^m N_n^m\right),\quad \delta_m=\frac{b_m}{1+(b_m\lambda/2)^2},\tag{6}$$

$$w_{n+1}^m=-\kappa_{n+1}^m+2\arctan\frac{b_m+a_n}{b_m-a_n}\tan\frac{w_n^m}{2}\tag{7}$$

によって定める．ただし数列 b_m と初期値の列 w_0^m は $\sin\left(w_{n+1}^m+\kappa_{n+1}^m-w_{n-1}^m\right)$ がすべての n について定符号であるように与えるものとする．このとき, 以下のことが成りたつ．

1. (等周性) すべての m について γ^m は $\left|\gamma_{n+1}^{m+1}-\gamma_n^{m+1}\right|=\left|\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m\right|=\epsilon_n$ をみたす．
2. (振率保存性) すべての m について γ^m の振率は λ である．
3. (時間発展) フルネ枠 $\Phi_n^m=[T_n^m,N_n^m,B_n^m]$ は

$$\Phi_{n+1}^m=\Phi_n^m L_n^m,\quad \Phi_n^{m+1}=\Phi_n^m M_n^m\tag{8}$$

をみたす．ただし行列 L は

$$L_n^m=R_1\left(-\nu_{n+1}\right)R_3\left(\kappa_{n+1}^m\right)\tag{9}$$

であり, 各 m について M_n^m は次のいずれかで与えられる．もし $\sin\left(w_{n+1}^m+\kappa_{n+1}^m-w_{n-1}^m\right)>0$ ならば

$$M_n^m=R_3\left(w_n^m\right)R_1\left(\mu_m\right)R_3\left(w_{n+1}^m+\kappa_{n+1}^m\right),\quad \mu_m=-2\arctan\frac{b_m\lambda}{2}\tag{10}$$

であり, もし $\sin\left(w_{n+1}^m+\kappa_{n+1}^m-w_{n-1}^m\right)<0$ ならば

$$M_n^m=R_3\left(w_n^m\right)R_1\left(\mu_m\right)R_3\left(-w_{n+1}^m-\kappa_{n+1}^m\right),\quad \mu_m=2\arctan\frac{2}{b_m\lambda}\tag{11}$$

である．

4. (両立条件) 行列 M が (10) の場合, 組 L, M は離散 mKdV 方程式のラックス行列である. すなわち, 写像 Φ についての差分方程式系 (8) の両立条件 $L_n^{m+1} M_n^m = M_{n+1}^m L_n^m$ は
$$w_{n+1}^m - w_{n-1}^m = \kappa_n^{m+1} - \kappa_{n+1}^m$$
であり, ここから (7) を用いて κ を消去すると離散 mKdV 方程式
$$\frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} - \frac{w_n^m}{2} = \arctan\left(\frac{b_{m+1}+a_n}{b_{m+1}-a_n}\tan\frac{w_n^{m+1}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{b_m+a_{n+1}}{b_m-a_{n+1}}\tan\frac{w_{n+1}^m}{2}\right) \tag{12}$$
が従う. また, 行列 M が (11) の場合, 組 L, M は離散サイン・ゴルドン方程式のラックス行列である. すなわち, (8) の両立条件より
$$w_{n+1}^m - w_{n-1}^m = -\kappa_n^{m+1} - \kappa_{n+1}^m \tag{13}$$
が得られ, これと (7) から離散サイン・ゴルドン方程式
$$\frac{w_{n+1}^{m+1}}{2} + \frac{w_n^m}{2} = \arctan\left(\frac{b_{m+1}+a_n}{b_{m+1}-a_n}\tan\frac{w_n^{m+1}}{2}\right) + \arctan\left(\frac{b_m+a_{n+1}}{b_m-a_{n+1}}\tan\frac{w_{n+1}^m}{2}\right) \tag{14}$$
が従う.

注意 3.3 定理 3.2 に関連していくつかの注意を述べる.

1. 定理のなかでも述べたように, 時間発展の各ステップ m について, 空間離散曲線を離散 mKdV 方程式によって変形させるか, あるいは離散サイン・ゴルドン方程式によって変形させるか, 自由に選択することができる. この自由度は, 連続系や半離散系にはない, 離散系特有のものである.
2. 公式 (6) とそっくりな式が, 定捩率で速さ 1 の空間曲線に対するベックルント変換として知られている [3]. ただし公式 (6) をその文脈で理解する場合には, 回転角を表す函数 w を, 初期曲線の弧長に関する 1 変数函数と思いなおし, 常微分方程式 $w' = (2/b)\sin w - \kappa$ で定める必要がある. ここで κ は曲線の曲率であり, b は任意定数である. この常微分方程式が出てくる理由は, 負の定曲率曲面に対するベックルント変換を思い出すと分かる.
3. 定理では述べなかったが, 離散 mKdV 方程式や離散サイン・ゴルドン方程式の解をもちいて, 定捩率の空間離散曲線の捩率保存等周等距離変形列を逆構成することもできる. 後の注意 3.5 を参照されたい.
4. 空間離散曲線に対する差分間隔は捩率によって変形される. 実際, 空間離散曲線に対して用いている差分間隔 ϵ_n, δ_m は, 離散 mKdV 方程式や離散サイン・ゴルドン方程式の差分間隔 a_n, b_m と
$$\epsilon_n = \frac{a_n}{1+(a_n\lambda/2)^2}, \quad \delta_m = \frac{b_m}{1+(b_m\lambda/2)^2}$$
のように関係する. 離散曲線の差分間隔と離散ソリトン方程式の差分間隔を共通にとることができるのは捩率 λ が 0 の場合, すなわち平面離散曲線の等周等距離変形 [16] [12] の場合に限ることが分かる. この, 離散曲線の差分間隔と離散ソリトン方程式の差分間隔は異なる, という知見は今後の離散曲線の研究で役に立つことが期待される.
5. 定捩率 λ の空間曲線は, 半径 $1/|\lambda|$ の球面 $\mathbb{S}^2(1/|\lambda|)$ 内の曲線と対応する [1] [14]. 空間離散曲線の場合にも同様の対応関係がある. 実際, 離散曲線 $\Gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{S}^2(1/|\lambda|)$ に対して
$$\gamma_n = \lambda \sum_k^n \Gamma_{k-1} \times \Gamma_k \tag{15}$$
は $\mathbb{R}^3$ 内の定捩率 λ の離散曲線を与え, 逆に $\mathbb{R}^3$ 内の定捩率 λ の離散曲線 γ とその陪法線ベクトル B に対して $\Gamma_n = \pm(1/\lambda) B_n$ は $\mathbb{S}^2(1/|\lambda|)$ 内の離散曲線を与える. したがって, 定捩率の空間離散曲線 γ に

対する離散時間発展 (6) から, 自動的に, ドリーヴァとサンティニによって得られた球面離散曲線 Γ に対する離散サイン・ゴルドン流 [5, Section 5] が導かれる. ところが逆に, 彼らの離散サイン・ゴルドン流をもとに公式 (6) を導くのは, 式 (15) からわかるように和分を実行する必要があるため, 困難である.

6. 離散サイン・ゴルドン方程式という名前の差分方程式は複数存在するが, よく知られているのは広田 [7] による

$$\sin\frac{\theta_{n+1}^{m+1}-\theta_{n}^{m+1}-\theta_{n+1}^{m}+\theta_{n}^{m}}{4}=\frac{a_n}{b_m}\sin\frac{\theta_{n+1}^{m+1}+\theta_{n}^{m+1}+\theta_{n+1}^{m}+\theta_{n}^{m}}{4} \tag{16}$$

だろう. この差分方程式は, 離散サイン・ゴルドン方程式 (14) のポテンシャル版となっている. 実際, 両立条件 (13) は

$$w_n^m=-\frac{\theta_n^{m+1}+\theta_{n+1}^m}{2},\quad \kappa_n^m=\frac{\theta_{n+1}^m-\theta_{n-1}^m}{2}$$

なるポテンシャル θ の存在を示唆しているが, この変数変換によって, 式 (7) が広田の式 (16) を与える.

定理 3.2 では, 函数 $\sin\left(w_{n+1}^m+\kappa_{n+1}^m-w_{n-1}^m\right)$ が n の函数として定符号であることが, 振率を保存するための必要十分条件であると述べた. しかし本当にこの条件が達成されるような数列の組 b_m, w_0^m が存在するのかどうか, 不明瞭だろう. つぎの命題は, 数列 b_m の選び方について, ひとつの十分条件を与えたものである.

命題 3.4 (定振率条件を達成するための十分条件) 定理 3.2 で述べた空間離散曲線の離散的変形 $\gamma^m\mapsto\gamma^{m+1}$ において, 各 m について正定数 b_m を

$$b_m<\min\left\{a_{\min}\tan\left(\kappa_{\min}^m/4\right),\ -c_m+\sqrt{{c_m}^2+a_{\min}a_{\max}}\right\}$$

または

$$b_m>\max\left\{a_{\max}\cot\left(\kappa_{\min}^m/4\right),\ c_m+\sqrt{{c_m}^2+a_{\min}a_{\max}}\right\}$$

をみたすように選べば, 定数 w_0^m の値によらず, 変形 $\gamma^m\mapsto\gamma^{m+1}$ は振率を保存する. ただし

$$a_{\min}=\min_n a_n,\quad a_{\max}=\max_n a_n,\quad \kappa_{\min}^m=\min_n\kappa_n^m,\quad \kappa_{\max}^m=\max_n\kappa_n^m,\quad c_m=\frac{a_{\max}-a_{\min}}{2\cos\left(\kappa_{\max}^m/2\right)}$$

とおいた. もし b_m を前者の条件をみたすように選んだ場合は, 函数 $\sin\left(w_{n+1}^m+\kappa_{n+1}^m-w_{n-1}^m\right)$ の値は常に正で, したがって変形は離散 mKdV 流である: すなわちフルネ枠は (8), (9), (10) にしたがって変形される. あるいは b_m を後者のように選んだならば, 函数 $\sin\left(w_{n+1}^m+\kappa_{n+1}^m-w_{n-1}^m\right)$ の値は常に負で, 変形は離散サイン・ゴルドン流である: すなわちフルネ枠は (8), (9), (11) にしたがって変形される.

注意 3.5 (解とシムの公式) 命題 3.4 は数列 b_m の選びかたの一例を与えたに過ぎず, 数列の組 b_m, w_0^m の選び方はこの他にもいろいろなものがあり得る. また, ここまでは順問題について述べてきたが, 反対に逆問題を考える場合には, この厄介な定振率条件を気にする必要がなくなり, 数列 b_m, w_0^m は自由に与えることができるようになる. この逆構成について詳しく述べよう. 定数 λ と数列 a_n, b_m, w_n^0, w_0^m に対して, 函数 $w=w_n^m$ を離散 mKdV 方程式 (12) または離散サイン・ゴルドン方程式 (14) の解として定め, さらに函数 κ を式 (7) で定める. このとき, 差分方程式系 (8) の解を $\varPhi$ とし, それを SU(2) 値の写像に変換したものを ϕ とする. 最後に

$$\gamma=-\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\phi\right)\phi^{-1} \tag{17}$$

とおくと γ は $\mathfrak{su}(2)\cong\mathbb{R}^3$ に値をとる写像であって, 定理 3.2 で述べた定振率 λ の空間離散曲線に対する振率保存等周等距離変形を与える. これらの手順を, 離散 mKdV 方程式の多重ソリトン解をもちいて具体的に実行してみよう. 定数 λ と自然数 N, および数列 a_n, b_m を固定する. まず離散 mKdV 方程式 (12) の N ソリトン解を与え, 次に, その解によって記述される定振率 λ の空間離散曲線の振率保存等周等距離変形列を逆構成す

る．ここでは簡単のため, N ソリトン解を 1 成分カソラチ型の τ 函数によって与え, さらに, 自励的な場合（すなわち差分間隔 a_n, b_m がともに定数の場合）についてのみ述べる．まず離散 mKdV 方程式の N ソリトン解は

$$w_n^m = \frac{\theta_n^{m+1} - \theta_{n+1}^m}{2}, \quad \theta_n^m = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau_N^{m,n}}{\overline{\tau}_N^{m,n}}$$

と構成できる．ただし

$$\tau_N^{m,n} = \det\left(f_{i,j-1}^{m,n}\right)_{i,j=1,\ldots,N}, \quad \overline{\tau}_N^{m,n} = \det\left(f_{i,j}^{m,n}\right)_{i,j=1,\ldots,N},$$
$$f_{i,j}^{m,n} = \frac{c_i p_i^j}{(1-p_i a)^n (1-p_i b)^m} + \frac{d_i(-p_i)^j}{(1+p_i a)^n (1+p_i b)^m}$$

であり, パラメータは各 $i = 1, \ldots, N$ について

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad d_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

とする．この N ソリトン解に対応するフルネ枠 Φ を SU(2) 値の写像に変換したものを ϕ と書けば

$$\phi_n^m = \begin{bmatrix} \alpha_n^m & \beta_n^m \\ -\left(\beta_n^m\right)^* & \left(\alpha_n^m\right)^* \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \alpha_n^m \\ \beta_n^m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(1+q^2a^2\right)^{n/2}\left(1+q^2b^2\right)^{m/2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_n^m & 0 \\ 0 & 1/Q_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{N+1}^{m,n}/\tau_N^{m,n} \\ \overline{\tau}_{N+1}^{m,n}/\overline{\tau}_N^{m,n} \end{bmatrix},$$
$$Q_n^m = q^{1/2}\exp\left(\sqrt{-1}\frac{\theta_n^m - \theta_{n+1}^m}{4}\right)$$

と構成できる．ただし星印は複素共役を意味し, パラメータ c_{N+1}, d_{N+1}, p_{N+1} は

$$c_{N+1}^2 + d_{N+1}^2 = \frac{1}{q}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{q^2+p_i^2}, \quad p_{N+1} = \sqrt{-1}q, \quad q \in \mathbb{R}$$

をみたすものとする．このようにパラメータを選ぶと自動的に $\det\phi = 1$ である．最後に $q = (1/a)\tan(\lambda/2)$ とおいて SU(2) 枠 ϕ を λ で微分すれば, シムの公式 (17) によって空間離散曲線の等周変形列が復元される．

4 離散 K 曲面

定理 3.2 で記述される離散曲線の等周変形列は $\mathbb{R}^3$ 内で離散曲面をなすが, それは離散 K 曲面である．離散 K 曲面は, 負の定曲率曲面の離散的類似として, ボベンコとピンカールによって詳しく調べられた [2].

定義 4.1 写像 $\gamma\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3, (m,n) \mapsto \gamma_n^m$ が各 m, n について次の条件をみたすとき, 離散 K 曲面という．

1. 5 点 γ_n^m, γ_{n+1}^m, γ_{n-1}^m, γ_n^{m+1}, γ_n^{m-1} が同じ平面上にある．このとき γ は離散漸近網をなすという．
2. $|\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m| = |\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_n^{m+1}|$ かつ $|\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m| = |\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_{n+1}^m|$ が成りたつ．

命題 4.2 定理 3.2 で記述される空間離散曲線の変形列 γ は離散 K 曲面をなす．

証明 直接の計算で

$$\gamma_n^{m-1} = \gamma_n^m - \delta_{m-1}\left(\cos\left(w_{n+1}^{m-1} + \kappa_{n+1}^{m-1}\right)T_n^m \mp \sin\left(w_{n+1}^{m-1} + \kappa_{n+1}^{m-1}\right)N_n^m\right)$$

であることが分かる．ただし右辺の複号は, 行列 M を (10) で与えた場合がマイナスで, (11) で与えた場合がプラスである．したがって γ は離散漸近網をなす．さらに $\left|\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m\right| = \epsilon_n$, $\left|\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m\right| = \delta_m$ である． □

公式 (6) は, 離散 K 曲面の新しい構成方法を与えている．とくに注意 3.5 では, 離散 mKdV 方程式の N ソリトン解によって記述されるような離散 K 曲面の位置ベクトルを, 陽的に書き下した．

5 先行研究との関連

空間離散曲線の離散時間発展については, 第 1 節でも述べたように, 離散可積分系理論の視点からの研究がきわめて少ない. 第 5.1 節では, そのような数少ない先行研究の結果をわれわれの主定理 3.2 と比較する場合の便利のために, ホフマン [9] とピンカールら [18] が定義した離散時間発展を紹介する. また第 5.2 節では, 時間発展させるまえの空間離散曲線そのものがみたす差分方程式, すなわちフルネ・セレの公式 (1) に関連して, 十河 [19] の定理を紹介する.

5.1 空間離散曲線の空間上の離散 NLS 流 (?)

空間離散曲線の離散時間発展 $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^m, \gamma^{m+1}, \ldots$ を考える.

1. 平面 $\operatorname{span}\left\{\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m,\, \gamma_n^{m+1}-\gamma_n^m\right\}$ と平面 $\operatorname{span}\left\{\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m,\, \gamma_{n+1}^{m+1}-\gamma_{n+1}^m\right\}$ のなす角を ψ_n^m とする. すなわち

$$\cos \psi_n^m=\left\langle\frac{\left(\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m\right) \times\left(\gamma_n^{m+1}-\gamma_n^m\right)}{\left|\left(\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m\right) \times\left(\gamma_n^{m+1}-\gamma_n^m\right)\right|}, \frac{\left(\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m\right) \times\left(\gamma_{n+1}^{m+1}-\gamma_{n+1}^m\right)}{\left|\left(\gamma_{n+1}^m-\gamma_n^m\right) \times\left(\gamma_{n+1}^{m+1}-\gamma_{n+1}^m\right)\right|}\right\rangle$$

とする. ホフマン [9] によれば, この函数 ψ が定数函数であるとき, 空間離散曲線の離散時間発展は離散 NLS 方程式によって統制される, らしい. ここで「らしい」と書いたのは筆者には論文 [9] がほとんど理解できないからで, もしかしたらこの解釈は間違っているかもしれない. 彼の用語では, 角 ψ が定数となるような時間発展をベックルント変換と呼ぶ. 一方で, 定捩率な空間離散曲線に対するわれわれの時間発展 (6) について角 ψ を計算すると

$$\psi_n^m=\nu_{n+1}=2 \arctan \frac{a_n \lambda}{2}$$

である. したがって, もし差分間隔 a_n を定数に制限するならば, 公式 (6) はベックルント変換を与える. しかし, 公式 (6) が定める離散時間発展と離散 NLS 方程式との関係は不明である.

2. ホフマンの結果を下敷きにしてピンカールらも離散 NLS 方程式によって記述される離散的変形を考察した. まず初等幾何学的な議論からただちに分かるように, 一般に, 空間離散曲線の等周かつ等距離であるような変形 $\gamma^m \mapsto \gamma^{m+1}$ に対して, ある函数 c^m が存在して, 各 n について

$$\gamma_{n+1}^{m+1}-\gamma_n^{m+1}-\gamma_{n+1}^m+\gamma_n^m=\frac{1}{c_n^m}\left(\gamma_{n+1}^{m+1}-\gamma_n^m\right) \times\left(\gamma_n^{m+1}-\gamma_{n+1}^m\right)$$

と書けることに注意する. ピンカールら [18] によれば, この函数 c が定数函数となるとき, 空間離散曲線の離散時間発展は離散 NLS 方程式によって記述される, らしい. ここで「らしい」と書くのもホフマンの場合と同様の理由による. 彼らの用語では, 函数 c が定数となるような時間発展をダルブー変換という. 一方で, 定捩率な空間離散曲線に対するわれわれの時間発展 (6) について函数 c を計算すると

$$c_n^m=\frac{8 \lambda\left(a_n^2-b_m^2\right)}{\left(4+a_n^2 \lambda^2\right)\left(4+b_m^2 \lambda^2\right)}$$

となっており, したがって, もし差分間隔 a_n, b_m をともに定数に制限するならば, 公式 (6) はダルブー変換を与えることになる. ところがやはり公式 (6) と離散 NLS 方程式との関係は不明である.

ここに紹介したベックルント変換あるいはダルブー変換の難点は, その定義の仕方が陰的なせいで, 離散 NLS 方程式との関係を正確に見ることができないところにある. 空間離散曲線の空間上の離散 NLS 流を陽的に定式化することは, 今後の研究課題である.

5.2 ケーリー変換

十河はコラム [21] のなかで論文 [19] について触れ, 『離散的 Euler's Elastica という題名になっていますが, 実はこの離散的 F-S 方程式の結果を報告する, というのが一番の目的だったのでした』と書いている. それが次の定理であり, 離散的 F-S（フルネ・セレ）方程式というのは式 (19) のことである.

定理 5.1 ([19]) 写像 $\Psi\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{SO}(3),\ n \mapsto \Psi_n$ の各成分を, 函数 $s,t,u,v\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ をもちいて

$$\Psi = \frac{1}{s^2+t^2+u^2+v^2}\begin{bmatrix} s^2+t^2-u^2-v^2 & 2\,(-sv+tu) & 2\,(su+tv) \\ 2\,(sv+tu) & s^2-t^2+u^2-v^2 & 2\,(-st+uv) \\ 2\,(-su+tv) & 2\,(st+uv) & s^2-t^2-u^2+v^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

と表示しておく. このとき Ψ は差分方程式

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n \begin{bmatrix} 1 & -\zeta_n & \xi_n \\ \zeta_n & 1 & -\eta_n \\ -\xi_n & \eta_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \zeta_n & -\xi_n \\ -\zeta_n & 1 & \eta_n \\ \xi_n & -\eta_n & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{19}$$

をみたす. ただし

$$\begin{bmatrix} \zeta_n \\ \eta_n \\ \xi_n \end{bmatrix} = \frac{1}{s_{n+1}s_n + t_{n+1}t_n + u_{n+1}u_n + v_{n+1}v_n} \begin{bmatrix} v_{n+1}s_n - u_{n+1}t_n + t_{n+1}u_n - s_{n+1}v_n \\ t_{n+1}s_n - s_{n+1}t_n - v_{n+1}u_n + u_{n+1}v_n \\ u_{n+1}s_n + v_{n+1}t_n - s_{n+1}u_n - t_{n+1}v_n \end{bmatrix}$$

である.

証明はおもしろい計算練習だがここでは省略することにして, いくつか注意を述べる.

注意 5.2

1. 行列 Ψ の成分表示 (18) で自動的に達成される条件は, 行列 Ψ の各列ベクトルの大きさが 1 で各列ベクトルが互いに直交すること, 要するに SO(3) の元であることのみである. したがって一般には式 (18) の行列 Ψ は空間離散曲線のフルネ枠に要請される性質（定義 2.1 参照）をみたさず, その意味では, 式 (19) を『離散的 F-S 方程式』と呼ぶのは誤解をまねく表現である. 式 (19) をフルネ・セレの公式 (1) と比較することにより
$$\zeta_n = \tan\frac{\kappa_{n+1}}{2}, \quad \eta_n = -\tan\frac{\nu_{n+1}}{2}, \quad \xi_n = \tan\frac{\kappa_{n+1}}{2}\tan\frac{\nu_{n+1}}{2}$$
であることが分かる. 空間離散曲線のフルネ枠に要請される条件 $\det(T_n, N_n, T_{n-1}) = 0$ は, このように ξ_n が $\xi_n = -\zeta_n\eta_n$ と分解できることと同値である.
2. 行列 Ψ の成分表示 (18) は, 行列
$$U = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & -v & u \\ v & 0 & -t \\ -u & t & 0 \end{bmatrix}$$
を用いて $\Psi = (U+V)(U-V)^{-1}$ として得られる. ケーリー変換 [20, p. 176] を参照されたい.
3. 連続系の場合にも定理 5.1 と同様のことがいえる. すなわち, 写像 $\Psi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ の各成分を, 函数 $s,t,u,v\colon I \to \mathbb{R}$ をもちいて式 (18) のように表示しておくと, Ψ は微分方程式
$$\Psi' = \Psi \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & \omega \\ \kappa & 0 & -\tau \\ -\omega & \tau & 0 \end{bmatrix}$$
をみたす. ただし
$$\begin{bmatrix} \kappa \\ \tau \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{2}{s^2+t^2+u^2+v^2} \begin{bmatrix} v's - u't + t'u - s'v \\ t's - s't - v'u + u'v \\ u's + v't - s'u - t'v \end{bmatrix}$$
である. 定理 5.1 は, この基本的な事実を離散化したものであると理解できる.

十河の定理は, 本稿で述べたきたような空間離散曲線の離散時間発展 $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ を求める際にどのような意義をもつだろうか. 空間離散曲線 γ のフルネ枠 Φ と空間離散曲線 $\overline{\gamma}$ のフルネ枠 $\overline{\Phi}$ はともに SO(3) の行列だから, 適当な回転角 x, y, z によって

$$\overline{\Phi} = \Phi R_3(x) R_1(y) R_3(z)$$

と関係づけられる. これを回転行列を使わずに, ケーリー変換の要領で

$$R_3(x) R_1(y) R_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & -v & u \\ v & 1 & -t \\ -u & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v & -u \\ -v & 1 & t \\ u & -t & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

と変換したとき, 角度 x, y, z と変数 u, v, t のあいだの関係は

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{uv - t \pm \sqrt{u^2+t^2}\sqrt{1+v^2}}{tv+u}, \tag{20}$$

$$\tan\frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{u^2+t^2}{1+v^2}}, \tag{21}$$

$$\tan\frac{z}{2} = \frac{-uv - t \pm \sqrt{u^2+t^2}\sqrt{1+v^2}}{tv-u} \tag{22}$$

である (複号同順). 離散ソリトン方程式によって記述されるような空間離散曲線の離散時間発展を見つけよう, という問題意識のもとでは, 全面的に数式処理ソフトウェアを活用することになるが, このとき, フルネ枠の変化 $\Phi^{-1}\overline{\Phi}$ を回転行列の積に分解するよりも, ケーリー変換の要領で表示したほうが, 数式処理上, 都合のよい場合がある. そのような場合, いったんケーリー変換の変数 u, v, t で計算しておいてから, 最後に関係式 (20), (21), (22) によって角度 x, y, z の情報にもどす, という作業をする. 実際, 離散サイン・ゴルドン流を記述する行列 (11) などはそういった数式処理上の試行錯誤からたまたま見つけたものである.

参考文献

[1] Larry M. Bates and O. Michael Melko, *On curves of constant torsion I*, J. Geom. **104** (2013), no. 2, 213–227. MR 3089777

[2] Alexander Bobenko and Ulrich Pinkall, *Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 3, 527–611. MR 1412677 (97m:53008)

[3] Annalisa Calini and Thomas Ivey, *Bäcklund transformations and knots of constant torsion*, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), no. 6, 719–746. MR 1643940 (99m:53004)

[4] Adam Doliwa and Paolo Maria Santini, *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 3, 1259–1273. MR 1317439 (95m:58072)

[5] ———, *The integrable dynamics of a discrete curve*, Symmetries and integrability of difference equations (Estérel, PQ, 1994), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 91–102. MR 1416829 (97j:58123)

[6] Hidenori Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), no. 3, 477–485.

[7] Ryogo Hirota, *Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation*, J. Phys. Soc. Japan **43** (1977), no. 6, 2079–2086. MR 0460936 (57 #925c)

[8] Masato Hisakado and Miki Wadati, *Moving discrete curve and geometric phase*, Phys. Lett. A **214** (1996), no. 5-6, 252–258. MR 1395552 (97g:53001)

[9] Tim Hoffmann, *Discrete Hashimoto surfaces and a doubly discrete smoke-ring flow*, Discrete differential geometry, Oberwolfach Semin., vol. 38, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 95–115. MR 2405662 (2010b:37196)

[10] Tim Hoffmann and Nadja Kutz, *Discrete curves in* $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ *and the Toda lattice*, Stud. Appl. Math. **113** (2004), no. 1, 31–55. MR MR2061648 (2005b:37170)

[11] Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura, and Yasuhiro Ohta, *Explicit solutions to the semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves*, J. Phys. A **45** (2012), no. 4, 045206, 16. MR 2874242

[12] ———, *Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves*, Kyushu J. Math. **66** (2012), no. 2, 303–324. MR 3051339

[13] ———, *Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves*, preprint, arXiv:1311.4245 (2013).

[14] G. Koenigs, *Sur la forme des courbes à torsion constante*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **1** (1887), no. 2, E1–E8. MR 1508058

[15] G. L. Lamb, Jr., *Solitons and the motion of helical curves*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976), no. 5, 235–237. MR MR0473584 (57 #13250)

[16] Nozomu Matsuura, *Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 8, 1681–1698. MR 2920827

[17] Kazuaki Nakayama, *Elementary vortex filament model of the discrete nonlinear Schrödinger equation*, J. Phys. Soc. Japan **76** (2007), no. 7, 074003.

[18] Ulrich Pinkall, Boris Springborn, and Steffen Weißmann, *A new doubly discrete analogue of smoke ring flow and the real time simulation of fluid flow*, J. Phys. A **40** (2007), no. 42, 12563–12576. MR 2392889 (2009a:76031)

[19] Kiyoshi Sogo, *Variational discretization of Euler's elastica problem*, Journal of the Physical Society of Japan **75** (2006), no. 6, 064007.

[20] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1974.

[21] 十河清, 厳密解と計算機, 数理科学, vol. 593, サイエンス社, 2012, pp. 56–57.